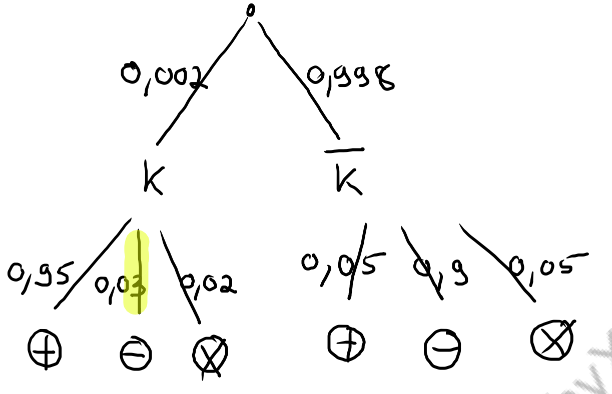
Bedingte Wahrscheinlichkeiten



$K \mathrel{\hat{=}}$ Krankheit / Allergie

2 Promille

Prävalenz $\mathrel{\hat{=}}$ Krankheitsrate $\mathrel{\hat{=}}$ 0,2‰

$P(K) = \frac{0,2}{100} = 0,002$

$P(\overline{K}) = 1 - 0,002 = 0,998$

nicht Krank

$\overline{K} = K^c$ (Komplement von K)

↳ Gegenereignis von K

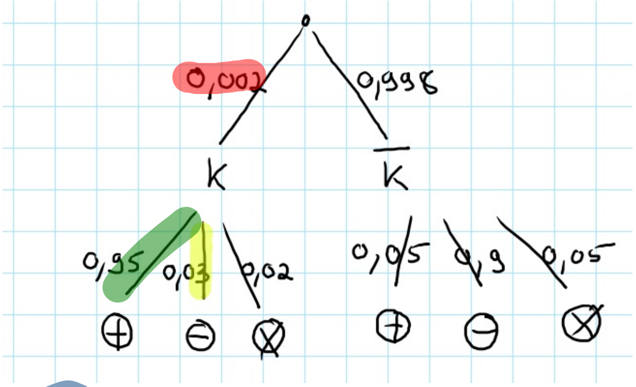
⊕ "positiver Test"

⊖ "negatives Test"

⊗ "ungültiges Test"

In 95% der Fälle wird die Krankheit aufgedeckt (Sensitivität)

In 3% der Fälle erhält man einen falsch negativen Test.



Totale W'keiten

Bedingte W'keiten

Schnittmengen

0,0019

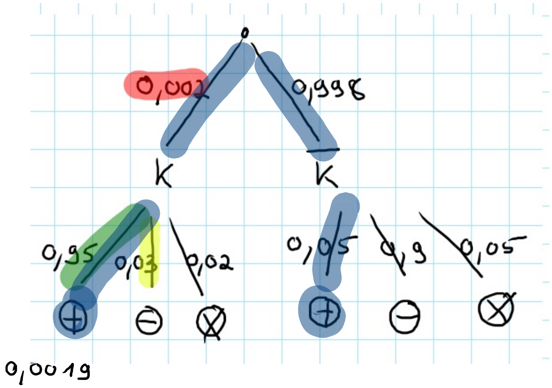
Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür krank zu sein und einen positiven Test zu erhalten?

$$P(K \cap \oplus) = P(K) \cdot P(\oplus \mid K) = 0{,}002 \cdot 0{,}95 = 0{,}0019$$

und

"Schnittmenge von K und ⊕"

Bedingung / Vorraussetzung / Vorgeschehen



	⊕	⊖	⊗	Totale W'keit
K	$P(K \cap \oplus) = 0{,}0019$	$P(K \cap \ominus) = 0{,}002 \cdot 0{,}03$	$P(K \cap \otimes) = 0{,}002 \cdot 0{,}02$	0,002
$\bar{K}$	$0{,}998 \cdot 0{,}05$	$0{,}998 \cdot 0{,}9$	$0{,}998 \cdot 0{,}05$	0,998
TW → Totale W'keit	0,0518			1

b) Was ist die W'keit dafür einen positiven Test zu erhalten?

$$P(\oplus) = ?$$

$$P(\oplus) = \underbrace{P(K \cap \oplus) + P(\bar{K} \cap \oplus)}_{\text{Beide „Wege" zum positiven Test}} = \underbrace{0{,}002 \cdot 0{,}95 + 0{,}998 \cdot 0{,}05}_{\text{Satz über die totale W'keit / Fallunterscheidung}} = 0{,}0518$$

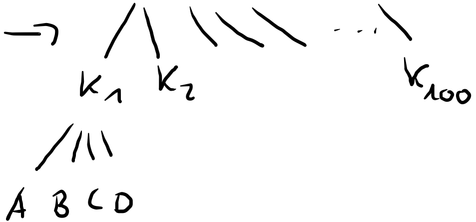
(Allgemeine Formel, wenn es mehrere Fälle gäbe.

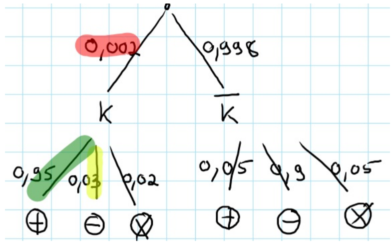
$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(K_i) \cdot P(A \mid K_i)$$

z.B.

z.B. Betriebe →

Güter A – D →





$P(\oplus) = 0{,}0518$

0,0019

c) Was ist die W'keit dafür tatsächlich krank zu sein, wenn man einen positiven Test erhält?

$$P(K \mid \oplus) = \frac{P(K \cap \oplus)}{P(\oplus)} = \frac{0{,}0019}{0{,}0518} = 0{,}0367$$

Bayes Formel

$$= \frac{P(K) \cdot P(\oplus \mid K)}{P(K) \cdot P(\oplus \mid K) + P(\bar{K}) \cdot P(\oplus \mid \bar{K})} = \frac{0{,}002 \cdot 0{,}95}{0{,}002 \cdot 0{,}95 + 0{,}998 \cdot 0{,}05} = 0{,}0019$$

$P(\oplus \mid K)$

Umgekehrtes "Bäumchen"
↓
Bayes-Regel entsteht automatisch

$0{,}0518 = P(\oplus)$

$? = P(K \mid \oplus)$

⊕

K

$P(K \cap \oplus) = 0{,}0019$

$P(\oplus \cap K)$

Multiplikativität

$P(K \cap \oplus) = P(\oplus) \cdot P(K \mid \oplus) \quad \mid : P(\oplus)$

$$\frac{P(K \cap \oplus)}{P(\oplus)} = P(K \mid \oplus)$$

Bestehensw'keit 70%

$P(B) = 0{,}7$

$P(\bar{B}) = 0{,}3$

$P(L_1 | B) = 0{,}8$

$P(L_2 | B) = 0{,}15$

$P(L_3 | B) = 0{,}05$

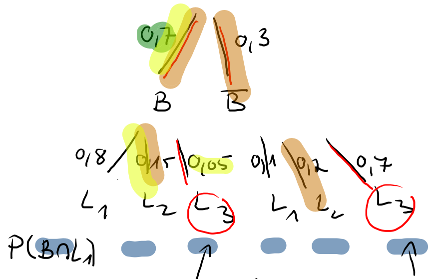
$P(L_1 | \bar{B}) = 0{,}1$

$P(L_2 | \bar{B}) = 0{,}2$

$P(L_3 | \bar{B}) = 0{,}7$

Lernmethode

Bestehen	L_1	L_2	L_3	
B	$0{,}7 \cdot 0{,}8$	$0{,}7 \cdot 0{,}15$	$0{,}7 \cdot 0{,}05$	$0{,}7$
$\bar{B}$	$0{,}3 \cdot 0{,}1$	$0{,}3 \cdot 0{,}2$	$0{,}3 \cdot 0{,}7$	$0{,}3$
			$P(L_3)$	1



$P(B \cap L_3)$

$= P(B) \cdot P(L_3 | B)$

$= 0{,}7 \cdot 0{,}05$

$P(B \cap A) = P(B | A) \cdot P(A)$

$= P(A | B) \cdot P(B)$

a) $P(\bar{B}) = 0{,}3$

b) $P(L_3 | B) = 0{,}05$

c) $P(L_3 | \bar{B}) = 0{,}7$

d) $P(L_3) = ?$

$P(L_3) = P(B) \cdot P(L_3 / B) + P(\bar{B}) \cdot P(L_3 / \bar{B})$

$= 0{,}7 \cdot 0{,}05 + 0{,}3 \cdot 0{,}7$

$= 0{,}245$

e) $$P(B / L_2) = \frac{P(B \cap L_2)}{P(L_2)} = \frac{P(B) \cdot P(L_2 / B)}{P(B) \cdot P(L_2 / B) + P(\bar{B}) \cdot P(L_2 / \bar{B})}$$

$$= \frac{0{,}7 \cdot 0{,}15}{0{,}7 \cdot 0{,}15 + 0{,}3 \cdot 0{,}2} = 0{,}\overline{63}$$

Denkt dran, dass einige Profs auf Antwortsätze bestehen!!! Wer am Rechner Klausur schreibt (RWTH'ler) muss nur das Ergebnis angeben. Bei der Agrar u. ElWLern aus Bonn unbedingt Antwortsatz + Formel nutzen.